



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Kontinuummekanik

*VI - endimensional materialeopførsel*

Rathkjen, Arne

*Publication date:*  
1996

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Rathkjen, A. (1996). *Kontinuummekanik: VI - endimensional materialeopførsel*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. Team Bind R9645 Nr. 1996.1

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



---

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

---

TEAM 1996.1

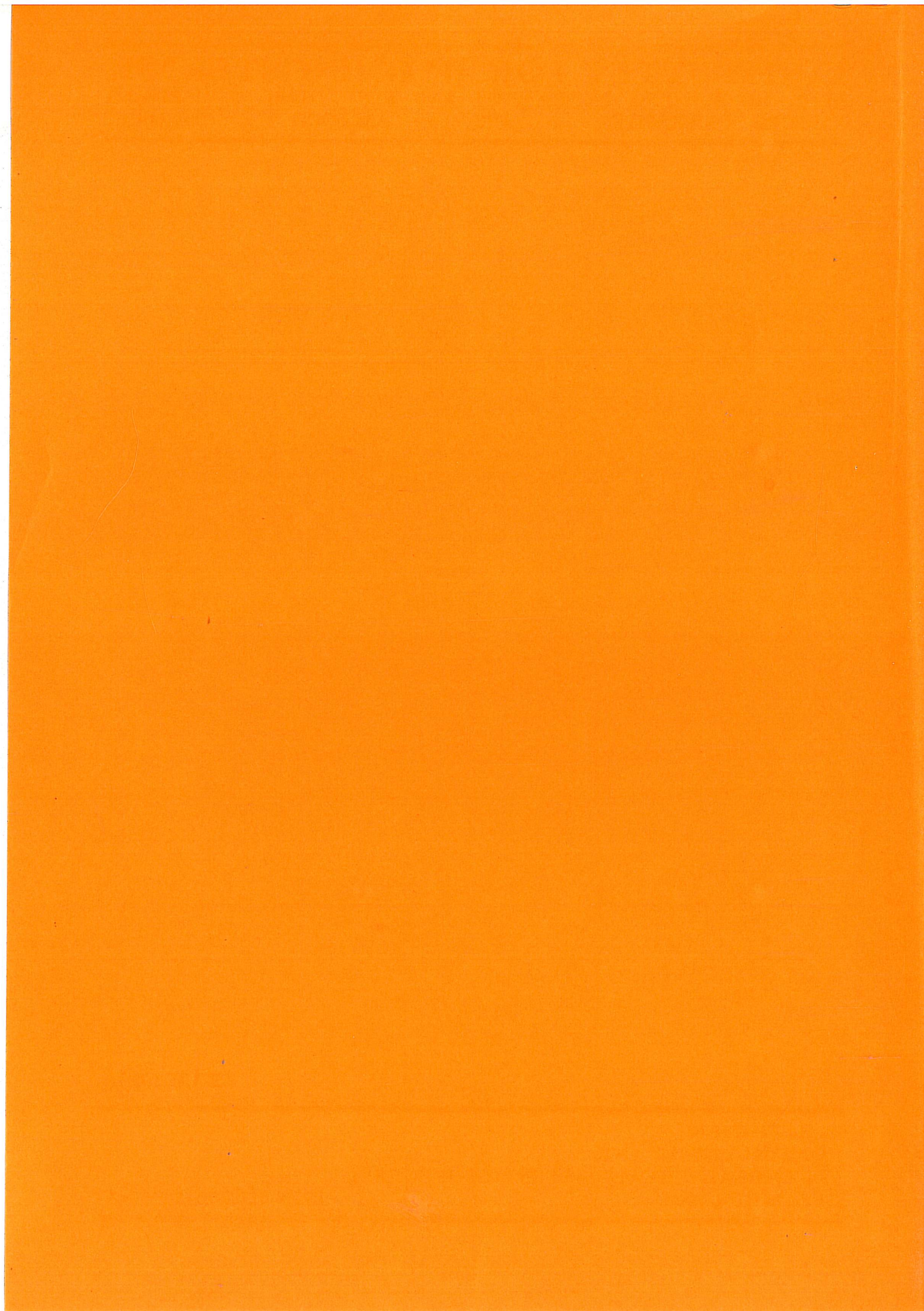
---

A. RATHKJEN  
KONTINUUMMEKANIK  
VI - ENDIMENSIONAL MATERIALEOPFØRSEL  
DECEMBER 1996

ISSN 0902-7513 R9645

---





---

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

---

TEAM 1996.1

---

A. RATHKJEN

KONTINUUMMEKANIK

VI - ENDIMENSIONAL MATERIALEOPFØRSEL

DECEMBER 1996

ISSN 0902-7513 R9645

---







## VI ENDIMENSIONAL MATERIALEOPFØRSEL

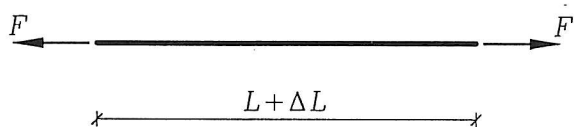
Feltligningerne: de kinematiske, de dynamiske og de energetiske ligninger, skal til enhver tid være opfyldt for konstruktionselementer og lignende, som beskrives indenfor kontinuummekanikkens rammer, men selv om dette er tilfældet, vil konstruktioner som er fremstillet af forskellige materialer udvise forskellig opførsel, når de udsættes for samme påvirkning. De materialer, som hovedsageligt skal behandles, er dem, der kan bruges til fremstilling af for eksempel de konstruktionselementer, der er behandlet i kapitel V, men også materialer, som kun kan beskrives ved strømningsbeskrivelsen, vil blive behandlet i et vist omfang.

Mens parametre som tøjninger, spændinger og massetæthed uden videre må forventes at indgå i beskrivelsen af materialers opførsel, vil der også være andre parametre inde i billedet, når fænomener som f.eks. energidissipation skal beskrives. Disse parametre skal identificeres, hvilket forsøges gjort i afsnit 23 og 24, som har overskrifterne fænomenologisk og energetisk beskrivelse. Nogle simple materialemodeller omtales derefter i afsnit 25.

Betragtningerne i dette kapitel er hovedsageligt knyttet til stangformede konstruktionselementer, påvirket alene i længderetningen, men med henblik på udvidelse til tre dimensioner.

### 23. FÆNOMENOLOGISK BESKRIVELSE

Udføres forsøg med stangformede legemer, som vist i figur 23.1 med oprindelig længde  $L$ , tværsnitsareal  $A$  og påvirket af en kraft  $F$  til en forlængelse  $\Delta L$ , da finder man

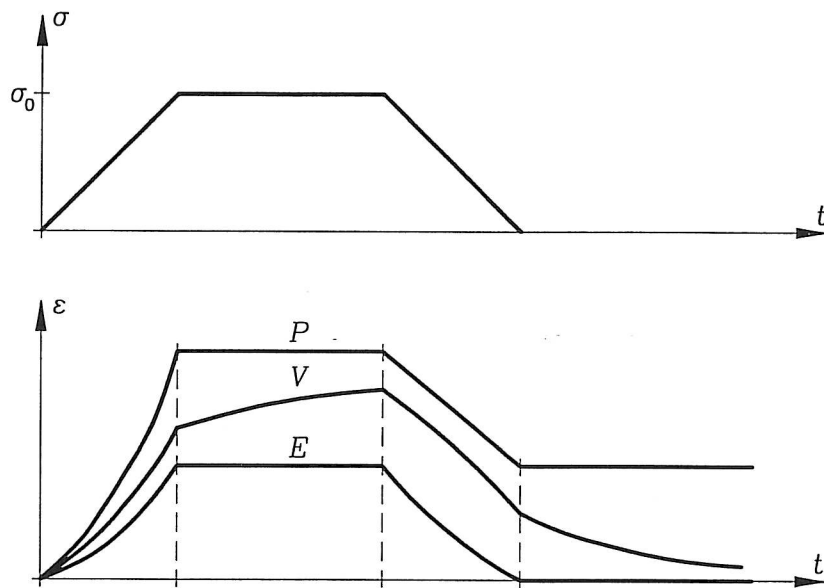


Figur 23.1

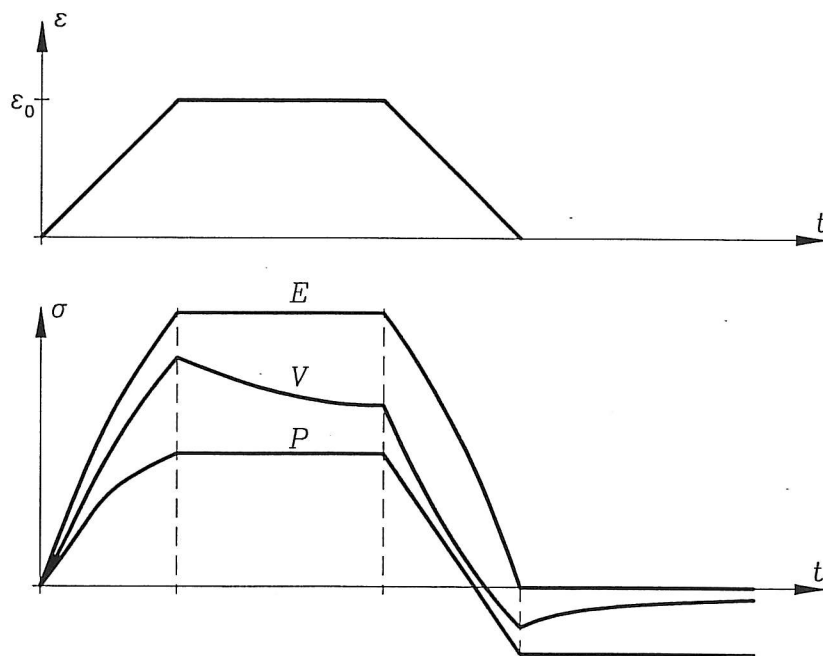
resultater, som vist i figur 23.2 og 23.3. I de to figurer er spændingen  $\sigma = F/A$ , tøjningen  $\epsilon = \Delta L/L$  og  $t$  tiden. Tøjningen forudsættes at være lille. Kurverne mærket  $E$ ,  $V$  og  $P$  repræsenterer forskellige materialer, henholdsvis et elastisk, et viskoelastisk og et plastisk materiale.

Resultaterne i figur 23.2 svarer til forsøg, hvor spændingen først vokser fra 0 til  $\sigma_0$ , holdes konstant på denne værdi for derefter at aftage til nul, mens forlængelsen  $\Delta L$  måles løbende. Resultaterne i figur 23.3 svarer til forsøg, hvor tøjningen først vokser fra 0 til  $\epsilon_0$ , holdes konstant på denne værdi for derefter at aftage til nul, mens kraften  $F$  måles løbende.





Figur 23.2



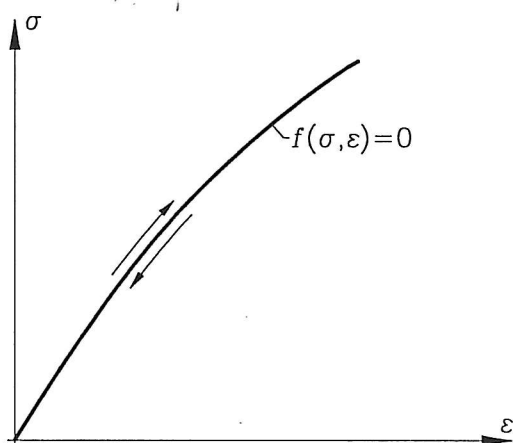
Figur 23.3



Af figurerne fremgår blandt andet følgende:

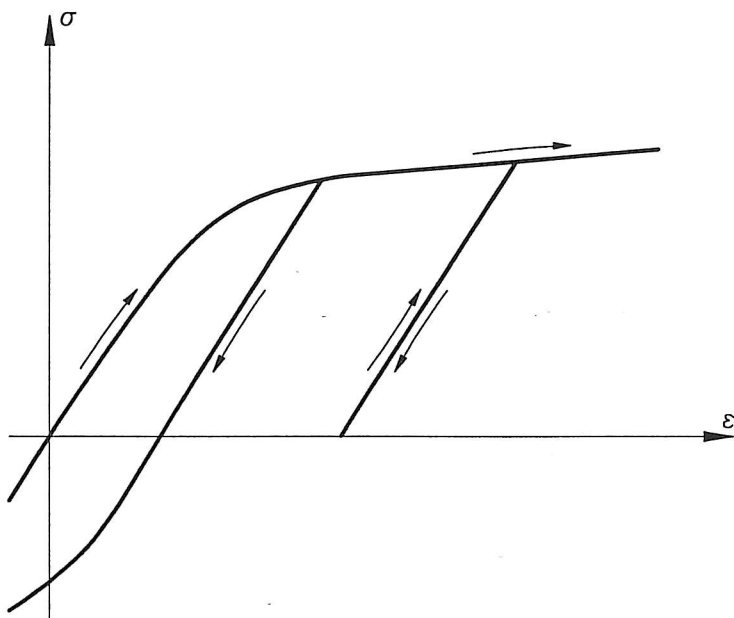
- Når spændingerne (tøjningerne) er konstante i elastiske og plastiske materialer, er også tøjningerne (spændingerne) konstante. I viskoelastiske materialer vokser tøjningerne, når spændingerne er konstante og spændingerne falder, når tøjningerne er konstante. Disse to fænomener betegnes henholdsvis krybning og relaksation.
- Når spændingen er ført tilbage til nul, udviser plastiske og viskoelastiske materialer tøjninger forskellige fra nul, mens tøjningerne i elastiske materialer også er nul. De plastiske tøjninger er konstante, mens de viskoelastiske tøjninger ændrer sig med tiden.
- I plastiske og viskoelastiske materialer kan tøjningerne kun føres tilbage til nul ved at påføre spændinger af modsat fortegn. I elastiske materialer er spændinger og tøjninger nul på samme tid.

Til løsning af bevægelsesligningerne har man brug for en sammenhæng mellem dynamiske og kinematiske størrelser, og som det ses af ovenstående, kan man for elastiske materialer angive en entydig sammenhæng  $f(\sigma, \epsilon) = 0$  mellem spændinger og tøjninger, som vist i figur 23.4. Pilene i figuren antyder, at sammenhængen gælder for såvel pålastning som aflastning.



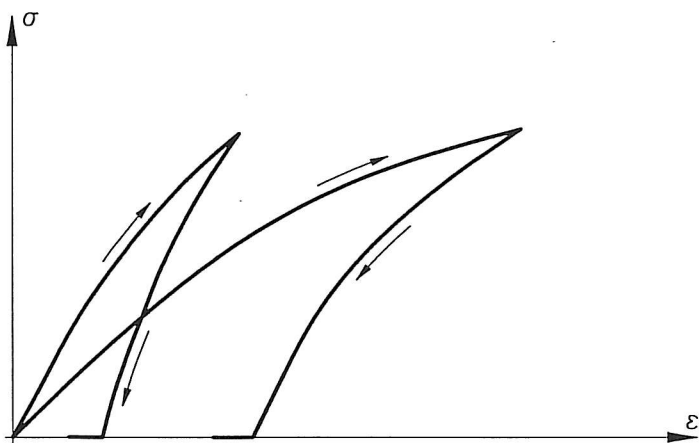
Figur 23.4

For plastiske materialer kan man også angive sammenhænge mellem spændinger og tøjninger, men som det fremgår af figur 23.5, er der ikke tale om en entydig sammenhæng. Om materialet befinder sig på den ene eller den anden gren af kurvesystemet i figur 23.5 afhænger i høj grad af, om der er tale om pålastning eller aflastning, samt af den tilstand materialet befinder sig i, når der skiftes fra pålastning til aflastning eller omvendt.



Figur 23.5

For viskoelastiske materialer gælder, at belastningshastigheden/deformationshastigheden har meget stor betydning, og man kan derfor kun angive en sammenhæng mellem spændinger og tøjninger svarende til for eksempel en ganske bestemt belastningshistorie, mens sammenhængen svarende til samme belastningshistorie påført med en anden hastighed giver en ganske anden sammenhæng. Et eksempel er vist i figur 23.6.



Figur 23.6

I henhold til (16.6) er de indre kræfters effekt  $P_i = \int_v \underline{\sigma} : \underline{d} dv$ , og ved en proces som forløber mellem tidspunkterne  $t_1$  og  $t_2$  udfører de indre kræfter arbejdet  $W_i = \int_{t_1}^{t_2} P_i dt$ .



Skriver man nu

$$dP_i = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dv = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} dv \quad (23.1)$$

dvs. de indre kræfters effekt pr. volumenenhed bliver

$$dP_i/dv = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (23.2)$$

Betegnes de indre kræfters arbejde pr. volumenenhed  $w_i$ , har man inkrementet

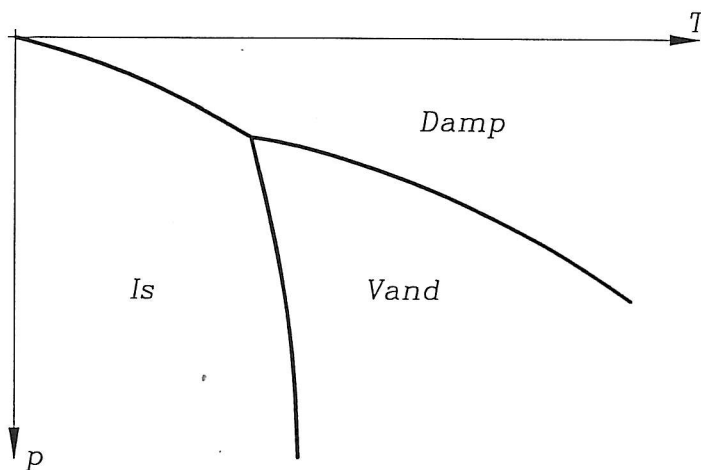
$$dw_i = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} dt = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d\epsilon}} \quad (23.3)$$

Arealerne under kurverne i figurerne 23.4–23.6 repræsenterer derfor de indre kræfters arbejde pr. volumenenhed og ved deformationsprocesser, der fører fra en ligevægtstilstand til en anden, er dette arbejde lig med de ydre kræfters arbejde, idet tilvæksten i kinetisk energi da er nul. Af figurerne fremgår nu, at ved en process, der begynder i ubelastet tilstand,  $\sigma = 0$ , og som ender i ubelastet tilstand, kan man for et elastisk materiale genvinde hele det arbejde de ydre kræfter har udført for at bringe materialet i belastet tilstand,  $\sigma = \sigma_0$ , mens dette ikke er tilfældet, når der er tale om plastiske og viskoelastiske materialer.

En del af den energi, der tilføres disse materialer som arbejde, bliver omsat til termisk energi, hvilket kan konstateres som en temperaturstigning.

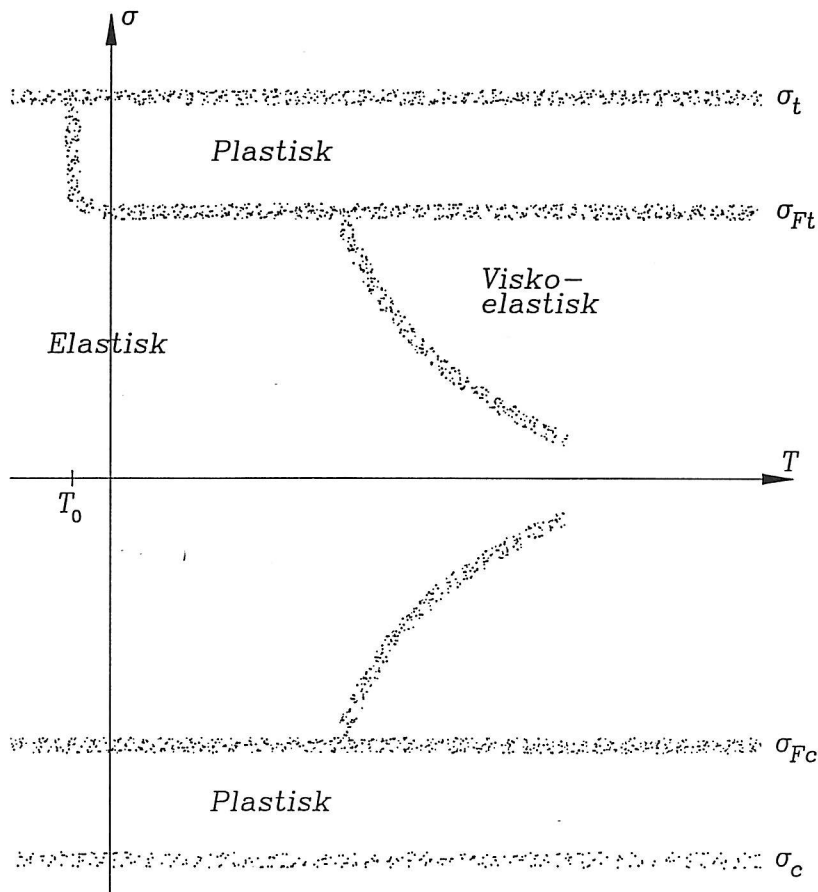
### 23.1 Deformationsmekanismer

Forskellige materialer udviser forskellig opførsel, men også et og samme stof kan udvise forskellig opførsel under forskellige forhold. Figur 23.7 viser som et eksempel de tilstande, som stoffet is-vand-damp kan befinde sig i. I figuren er  $p$  trykket og  $T$  temperaturen. Nu anvendes is kun sjældent som konstruktionsmateriale, men også et



Figur 23.7

udpræget konstruktionsmateriale som stål udviser forskellig opførsel under forskellige forhold, og hver form for opførsel kræver sin specielle beskrivelse. I figur 23.8 er, i stærkt forenklet form, vist hvilke beskrivelser, man kan benytte for et stål under forskellige forhold. Figur 23.8 viser, at stål i et givet, forholdsvis snævert temperaturinterval, kan beskrives som et elastisk-plastisk materiale under varierende spændinger. I et andet



- $\sigma_t$  – trækstyrke
- $\sigma_{Ft}$  – trækflydespænding
- $\sigma_{Fc}$  – trykflydespænding
- $\sigma_c$  – trykstyrke

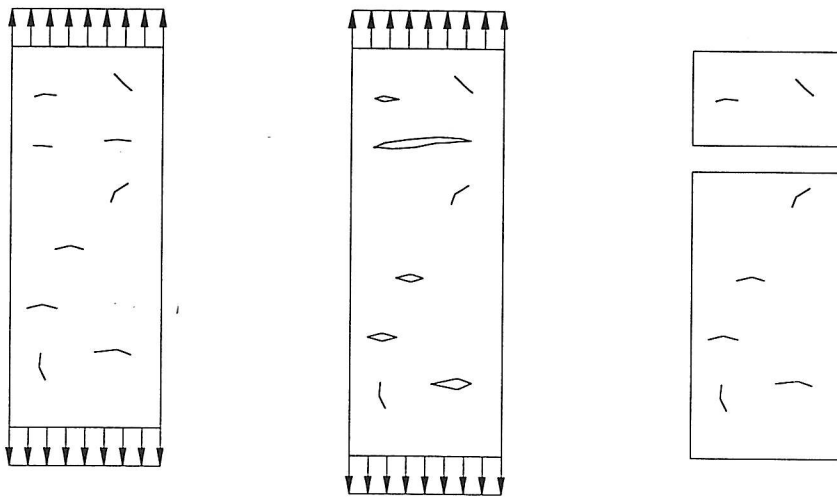
Figur 23.8

temperaturinterval må man yderligere indføre en viskoelastisk beskrivelse. For tilstrækkeligt høje temperaturer smelter stål og bliver flydende. Andre materialer, som f.eks. træ, antændes og brænder, mens andre materialer igen, f.eks. beton, mister *kohæsionen*, den indre sammenhæng ved høje temperaturer.

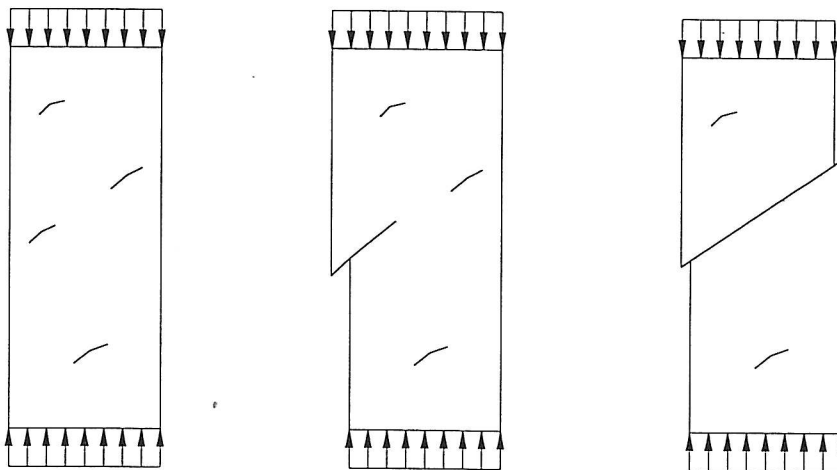
Tab af kohæsion er også, hvad der forekommer ved brud ved høje træk- eller trykspæn-

dingen. I træk kan bruddet foregå ved, at der vinkelret på trækretningen dannes revner, som åbner sig, eventuelt løber sammen og til sidst deler legemet i to eller flere stykker, se figur 23.9. I tryk kan der dannes flader (slipflader), langs hvilke der foregår glidning under en vinkel med trykretningen, se figur 23.10. Revner parallelt med trykretningen og glideflader under en vinkel med trækretningen kan også forekomme. I såvel træk som tryk kan bruddet være ledsaget af store, blivende deformationer, et sejt brud, eller bruddet kan komme pludseligt, uden varsel i form af store deformationer, et sprødt eller skørt brud.

I figur 23.8 er angivet en omslagstemperatur  $T_0$ , over hvilken et trækbrud er ledsaget af store, plastiske deformationer, og under hvilken bruddet er sprødt. Forholdene er

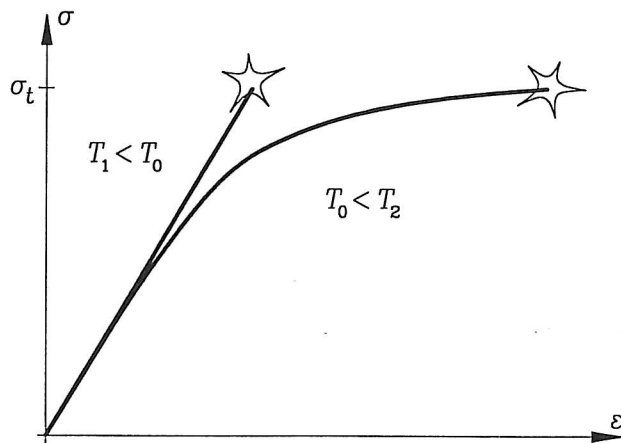


Figur 23.9



Figur 23.10

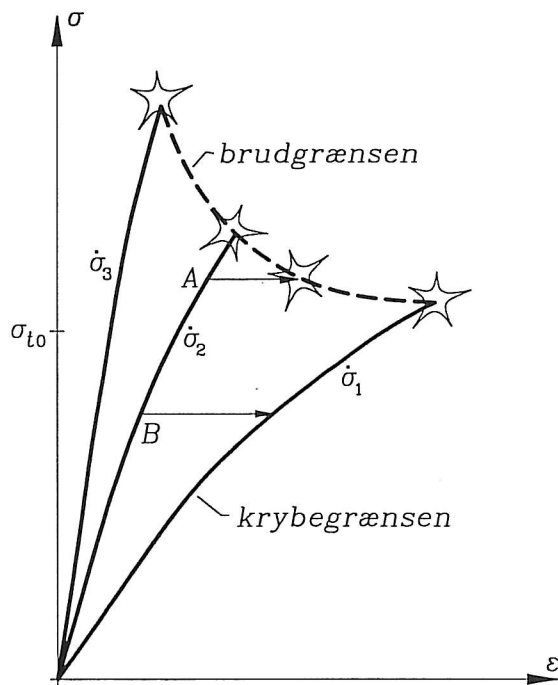




Figur 23.11

illustreret i en anden afbildning i figur 23.11, som viser sammenhængen mellem spænding  $\sigma$  og tøjning  $\varepsilon$  ved to temperaturer,  $T_1$  mindre end  $T_0$  og  $T_2$  større end  $T_0$ .

Figur 23.8 er baseret på langsomt voksende spændinger ved konstante temperaturer. Ændres belastningshastigheden kan det have indflydelse på såvel styrke som stivhed.

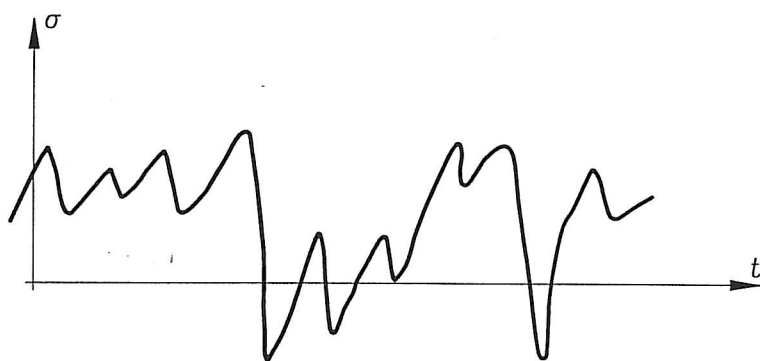


Figur 23.12

I figur 23.12 er skitseret spændings-tøjningsrelationer svarende til tre belastningshastigheder  $\dot{\sigma}_1 < \dot{\sigma}_2 < \dot{\sigma}_3$ . Belastningshastigheden  $\dot{\sigma}_1$ , er meget lille ( $\dot{\sigma}_1 \cong 0$ ), og den

tilsvarende styrke betegnes langtidsstyrken  $\sigma_{t0}$ . Hastigheden  $\dot{\sigma}_3$  er meget stor og svarer til stødpåvirkning. Den hertil svarende styrke kan være væsentlig større end  $\sigma_{t0}$ . For mellemliggende belastningshastigheder finder man kurver som den, der er mærket  $\dot{\sigma}_2$ ; styrker svarende til disse hastigheder ligger på den punkterede kurve, brudgrænsen. Belastes materialet med hastigheden  $\dot{\sigma}_2$  til punkt A, som svarer til en spænding større end  $\sigma_{t0}$ , men mindre end den aktuelle brudstyrke, og holdes spændingen derefter konstant, vil tøjningen vokse til brudgrænsen og krybebrud vil indtræde. Belastes derimod kun til punkt B svarende til en spænding mindre end  $\sigma_{t0}$ , da vil tøjningen vokse, indtil den når kurven mærket  $\dot{\sigma}_1$  og der gå i stå. Denne kurve betegnes derfor krybegrænsen.

Den langsomt voksende belastning, som ligger til grund for figur 23.8, kan også ændres til en vekslende belastning, se figur 23.13. Når sådanne forhold forekommer, viser det



Figur 23.13

sig som regel, at der opstår brud i materialet efter et antal svingninger, hvor de maksimale spændinger har været mindre end trækstyrken/trykstyrken. Fænomenet betegnes udmattelse.

Ovennævnte fænomener optræder i materialer, som man kan betegne som *passive*, og som er karakteriseret ved, at energi kun kan tilføres ved hjælp af arbejde og varme. I aktive materialer kan der yderligere forekomme processer, som gør, at disse materialer f.eks. kan udføre arbejde, dvs. flytte energi, der er tilført på anden vis end ved hjælp af arbejde og varme. Et eksempel er muskelarbejde. I det følgende behandles kun passive materialer, som yderligere er begrænset til at være beskrevet ved parametre, som er tidsuafhængige, dvs. fænomener som ældning og hærkning medtages ikke her.

## 24. ENERGETISK BESKRIVELSE

Som nævnt i begyndelsen af dette kapitel må mekaniske størrelser som tøjninger, spændinger og massetæthed forventes at indgå i beskrivelsen af materialers opførsel og efter omtalen i forrige afsnit af de fænomener, der kan observeres, kan man konstatere, at også termiske størrelser om f.eks. temperatur må føjes til listen. Ligesom tøjninger måles ud fra en referencetilstand, må også temperaturen  $T$  måles ud fra en referencetemperatur  $T_0$ . Temperaturforskellen betegnes  $\theta$  og er

$$\theta = T - T_0 \quad (24.1)$$

Samtlige de størrelser, der indgår i en materialebeskrivelse, betegnes *tilstandsparametre*. Hvilke tilstandsparametre, der indgår i beskrivelsen af et materiale, afhænger af flere forhold, først og fremmest naturligvis det materiale, der er tale om, i hvilken sammenhæng beskrivelsen forekommer, men også af hvor detaljerede oplysninger, man ønsker.

Udover tilstandsparametre optræder også *tilstandsfunktioner*. En tilstandsfunktion er en funktion, som afhænger alene af tilstandsparametrene, og ikke af hvorledes materialet er bragt i den pågældende tilstand. Som et eksempel kan nævnes den kinetiske energi  $K = \frac{1}{2} \int_v \rho v^2 dv$ , hvilket viser, at også størrelsen af hastighedsvektoren, farten  $v$ , må medregnes blandt tilstandsparametrene. Også den indre energi  $u = \int_v \rho u dv$  antages at være en tilstandsfunktion, mens f.eks. det arbejde, der udføres på et legeme i almindelighed, afhænger af den vej, ad hvilken legemet føres fra en tilstand til en anden, hvorfor arbejde ikke er nogen tilstandsfunktion.

Nogle tilstandsfunktioner som f.eks. den kinetiske energi er givet ved det samme udtryk, uanset hvilket materiale et legeme er lavet af, mens andre tilstandsfunktioner som f.eks. den indre energi bestemmes ved udtryk, som er materialeafhængige.

Endelig er der *tilstandsligninger*, som er de ligninger, der fører til de konstitutive ligninger for et materiale. En tilstandsligning er en funktionssammenhæng mellem de eller nogle af de tilstandsparametre, der indgår i en materialebeskrivelse, f.eks.

$$f(\rho, \varepsilon, \sigma, \theta, \dots) = 0 \quad (24.2)$$

hvor prikkerne antyder endnu ikke identificerede tilstandsparametre. Mens en tilstandsfunktion er en funktion af tilstandsparametre defineret for alle legemer, er en tilstandsligning en funktionssammenhæng, som kun gælder for et ganske bestemt materiale.

Af (24.2) får man

$$df = d\rho(\partial f/\partial \rho) + d\varepsilon(\partial f/\partial \varepsilon) + d\sigma(\partial f/\partial \sigma) + d\theta(\partial f/\partial \theta) + \dots = 0 \quad (24.3)$$

hvoraf man finder f.eks.

$$d\sigma = -(d\rho(\partial f/\partial \rho) + d\varepsilon(\partial f/\partial \varepsilon) + d\theta(\partial f/\partial \theta) + \dots)/(\partial f/\partial \sigma) \quad (24.4)$$



som i et område i tilstandsrummet definerer  $\sigma$  som en funktion af de øvrige tilstandsparametre. I udtrykket for en tilstandsfunktion

$$F = F_1(\rho, \varepsilon, \sigma, \theta, \dots) \quad (24.5)$$

kan man nu indsætte

$$\sigma = \sigma(\rho, \varepsilon, \theta, \dots) \quad (24.6)$$

og får tilstandsfunktionen

$$F = F_2(\rho, \varepsilon, \theta, \dots) \quad (24.7)$$

som en funktion af de øvrige tilstandsparametre alene.

Det skal bemærkes, at andre former for tilstandsligninger end (24.2) benyttes, men mere herom senere.

Ovenstående skal herefter, sammen med nogle energetiske udtryk fra kapitel IV, benyttes til at finde udtryk gældende for konstitutive ligninger for nogle simple materialemodeller. Effektligningen (16.9) benyttes på formen

$$\dot{W}_y = \dot{K} + \dot{W}_i \quad (24.8)$$

hvor

$$\dot{W}_i = \int_v \sigma \dot{\varepsilon} dv \quad (24.9)$$

Den tilførte varme er  $Q$ , og med den indre energi

$$u = \int_v p u dv = W_i + Q \quad (24.10)$$

kan termodynamikkens første hovedsætning, som udtrykker energiens konstans i et isoleret system, skrives

$$\dot{W}_y + \dot{Q} = \dot{K} + \dot{U} \quad (24.11)$$

Et *åbent* system kan udveksle både masse og energi med omverden, et *lukket* system kun energi, ikke masse, og et *isoleret* system hverken energi eller masse.

Om tilstandsfunktionen den specifikke indre energi forudsættes her, at den ikke afhænger eksplicit af tiden og om varmestrømvektoren  $\bar{q}$  forudsættes, at den er nul, når temperaturgradienten er nul.

### 24.1 Det elastiske materialeelement

Det elastiske materialelement defineres ved følgende forudsætninger:

- den tilførte varme pr. tidsenhed giver et bidrag til den indre energi, der kan udtrykkes ved

$$\dot{Q} = \int_v \rho c \dot{\theta} dv \quad (24.12)$$

hvor  $c$  er den specifikke varmekapacitet,

- de aktuelle tilstandsparametre er massetætheden  $\rho$ , tøjningen  $\varepsilon$ , spændingen  $\sigma$ , temperaturdifferensen  $\theta$  og varmekapaciteten  $c$ ,
- der eksisterer to tilstandsligninger, hvilket medfører, at f.eks.  $\sigma$  og  $c$  kan elimineres fra listen over argumenter,
- den specifikke indre energi kan udtrykkes som en funktion af  $\varepsilon$  og  $\theta$ ,  $u = w(\varepsilon, \theta)$ , hvor  $w$  kaldes tøjningsenergifunktionen,
- de to parametre  $\varepsilon$  og  $\theta$  kan variere uafhængigt af hinanden.

Hermed bliver den materielle tidsafledede af den specifikke indre energi

$$\rho \dot{u} = \sigma \dot{\varepsilon} + \rho c \dot{\theta} = \rho (\dot{\varepsilon} \partial w / \partial \varepsilon + \dot{\theta} \partial w / \partial \theta) \quad (24.13)$$

hvoraf

$$(\sigma - \rho \partial w / \partial \varepsilon) \dot{\varepsilon} = \rho (\partial w / \partial \theta - c) \dot{\theta} \quad (24.14)$$

Da  $\varepsilon$  og  $\theta$  kan variere uafhængigt af hinanden, må parenteserne på begge sider af lighedstegnet være nul, og de konstitutive ligninger er:

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \partial w / \partial \varepsilon \\ c &= \partial w / \partial \theta \end{aligned} \quad (24.15)$$

Et andet sæt konstitutive ligninger fremkommer, hvis man i stedet for tøjningsenergifunktionen  $w(\varepsilon, \theta)$  benytter den komplementære tøjningsenergifunktion  $h(\sigma, \theta)$ , som forudsættes at være en funktion af  $\sigma$  og  $\theta$  og defineres ved

$$\rho(\dot{u} + \dot{h}) = D(\sigma \varepsilon) / Dt = \dot{\sigma} \varepsilon + \sigma \dot{\varepsilon} \quad (24.16)$$

Hermed bliver

$$\rho \dot{u} = \dot{\sigma} \varepsilon + \sigma \dot{\varepsilon} - \rho \dot{h} = \sigma \dot{\varepsilon} + \rho c \dot{\theta} \quad (24.17)$$

og man har

$$\rho \dot{h} = \dot{\sigma} \varepsilon - \rho c \dot{\theta} = \rho (\dot{\sigma} \partial h / \partial \sigma + \dot{\theta} \partial h / \partial \theta) \quad (24.18)$$

og dermed

$$(\varepsilon - \rho \partial h / \partial \sigma) \dot{\sigma} = \rho (c + \partial h / \partial \theta) \dot{\theta} \quad (24.19)$$

Når  $\sigma$  og  $\theta$  kan variere uafhængigt, er parenteserne nul, og de konstitutive ligninger bliver

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \rho \partial h / \partial \sigma \\ c &= -\partial h / \partial \theta \end{aligned} \quad (24.20)$$

Da varmfylden  $c = dQ/d\theta$  vides at gå mod uendelig ved smeltning, kan denne beskrivelse kun benyttes ved temperaturer langt fra smeltepunktet.

## 24.2 Det dissipative materialeelement

Det dissipative materialeelement defineres ved følgende forudsætninger:

- den gennem overfladen tilførte varme pr. tidsenhed kan udtrykkes ved

$$\dot{Q} = - \int_a \hat{n} \cdot \bar{q} da = - \int_v \text{div } \bar{q} dv \quad (24.21)$$

hvor  $\bar{q}$  er varmestrømvektoren, se (16.28) og (16.29),

- et positivt arbejde på omverden kan kun udføres ved en formindskelse af den kinetiske energi, ikke ved en formindskelse af den indre energi,
- de aktuelle tilstandsparemetre omfatter massetætheden  $\rho$ , tøjningen  $\varepsilon$  og/eller tøjnings-hastigheden  $\dot{\varepsilon}$ , spændingen  $\sigma$ , temperaturdifferensen  $\theta$ , varmestrømvektoren  $\bar{q}$ , og eventuelt nogle endnu ikke identificerede parametre,
- den specifikke indre energi er en funktion af temperaturdifferensen  $\theta$  alene

Hermed bliver den materielle tidsafledede af den specifikke indre energi

$$\rho \dot{u} = \sigma \dot{\varepsilon} - \text{div } \bar{q} = \rho \dot{\theta} \partial u / \partial \theta \quad (24.22)$$

Sammenholdes (24.22) med forudsætningen om, at en formindskelse af den indre energi ikke kan udføre arbejde på omverden, kan man konstatere, at tøjninger og temperatur ikke kan variere uafhængigt af hinanden, men ud over det, får man ingen oplysninger om mulige former for konstitutive ligninger. Sådanne oplysninger må søges andetsteds og udtrykket (16.30) betragtes derfor

$$\dot{u} = \dot{u}_a + \dot{u}_b + \dot{u}_c + \dot{u}_d \quad (24.23)$$



hvor leddene på højresiden af lighedstegnet repræsenterer energi tilført som arbejde,  $u_a$  og  $u_b$ , og som varme,  $u_c$  og  $u_d$ , og afgivet som arbejde,  $u_a$  og  $u_c$ , og varme,  $u_b$  og  $u_d$ , under en energetisk proces.

For det elastiske materialeelement gælder, at  $\dot{u}_b = 0$ , mens de 3 resterende led ikke kan adskilles.

For det dissipative materialeelement gælder, at

$$\dot{u}_a = \dot{u}_c = 0 \quad (24.24)$$

samt

$$\dot{u}_b \geq 0 \quad (24.25)$$

når elementets indre energi ikke kan udføre positivt arbejde på omgivelserne.

Til  $u_b$  knyttes betegnelsen *dissipationen*  $D$  og hermed bliver *dissipationshastigheden*

$$\dot{D} = \sigma \dot{\epsilon} / \rho \quad (24.26)$$

For det dissipative materialeelement gælder, at det er det totale bidrag til den indre energi, der kan udtrykkes som

$$\dot{U} = \int_v \rho c \dot{\theta} dv$$

og man har derfor

$$\rho \dot{u} = \rho c \dot{\theta} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \text{div} \bar{q} \quad (24.27)$$

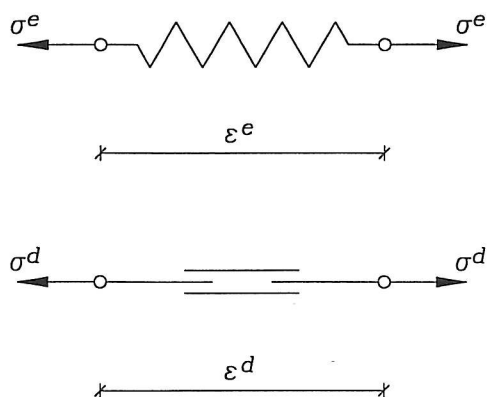
hvor

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} = \rho \dot{D} \geq 0 \quad (24.28)$$

En konstitutiv sammenhæng mellem spændinger  $\underline{\sigma}$  og tøjninger  $\underline{\epsilon}$  eller tøjningshastigheder  $\underline{\dot{\epsilon}}$  må tilfredsstille dissipationsuligheden (24.28).

### 24.3 Elastisk-dissipative materialelementer

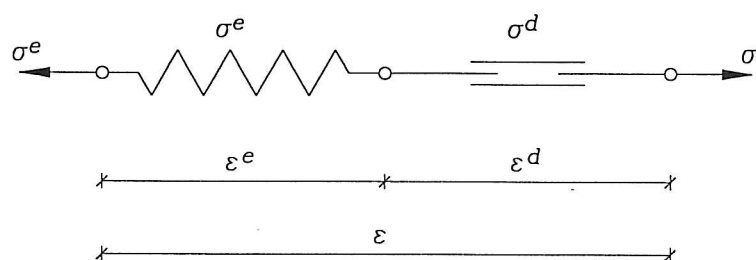
De to materialelementtyper kan kombineres på mange forskellige måder og derved beskrive forskellige former for opførsel. I det følgende symboliseres et elastisk element ved en fjeder og et dissipativt element symboliseres ved et friktionselement, se figur 24.1. Størrelser knyttet til det elastiske element forsynes med et øvre indeks  $e$ , og



Figur 24.1

størrelser knyttet til det dissipative element forsynes med et øvre indeks  $d$ . Størrelser forsynet med et indeks kaldes *indre parametre* i modsætning til de totale parametre som f.eks. spændingen  $\sigma$  og tøjningen  $\varepsilon$ . De totale parametre er dem, der indgår i f.eks. tøjnings-flytningsrelationer og bevægelsesligninger, mens de indre parametre ikke direkte er bundet af disse ligninger. Om de termiske størrelser antages, at de er de samme i begge elementtyper.

Først betragtes en serieforbindelse, som vist i figur 24.2. Man har, at den totale spæn-



Figur 24.2

ding  $\sigma$  er

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^d \quad (24.29)$$

og den totale tøjning  $\varepsilon$  er

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^d \quad (24.30)$$

Blandt tilstandsparametrene må man medtage enten  $\varepsilon^e$  eller  $\varepsilon^d$  og kræve

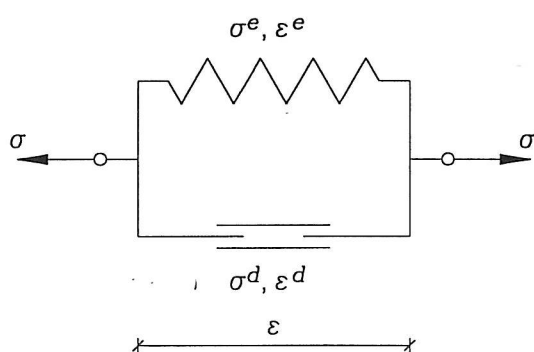
$$\sigma \dot{\varepsilon}^d = \sigma (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e) \geq 0 \quad (24.31)$$

En konstitutiv ligning, som kun indeholder totale parametre, fremkommer, når man for det elastiske element kender den komplementære tøjningsenergifunktion  $h$ , og for det dissipative elements vedkommende kender en funktionssammenhæng mellem f.eks. spænding og tøjningshastighed. Er denne sammenhæng  $F(\sigma^d, \dot{\varepsilon}^d) = 0$  bliver den konstitutive ligning

$$F\left(\sigma, \dot{\varepsilon} - \frac{D}{Dt}\left(\rho \frac{\partial h}{\partial \sigma}\right)\right) = 0 \quad (24.32)$$

en konstitutiv ligning, som foruden tøjningshastigheden og spændingen også tæller den tidsafledede af spændingen blandt sine argumenter.

Herefter betragtes en parallelforbindelse som vist i figur 24.3. Man har, at den totale



Figur 24.3

spænding  $\sigma$  er

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^d \quad (24.33)$$

og den totale tøjning  $\varepsilon$  er

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^d \quad (24.34)$$

Blandt tilstandsparametrene må man i dette tilfælde medtage enten  $\sigma^e$  eller  $\sigma^d$  og kræve

$$\sigma^d \dot{\varepsilon} = (\sigma - \sigma^e) \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (24.35)$$

Kendes tøjningsenergifunktionen  $w$  for det elastiske element og funktionssammenhængen  $F(\sigma^d, \dot{\varepsilon}^d) = 0$  for det dissipative element, kan man angive en konstitutiv ligning udtrykt ved totale parametre alene som

$$F\left(\sigma - \rho \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}, \dot{\varepsilon}\right) = 0 \quad (24.36)$$

Også dissipationuligheden (24.28) kan udtrykkes ved totale parametre. For en serieforbindelse finder man



$$\sigma \left( \dot{\epsilon} - \frac{D}{Dt} \left( \rho \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right) \right) \geq 0 \quad (24.37)$$

mens man for parallelforbindelsen får

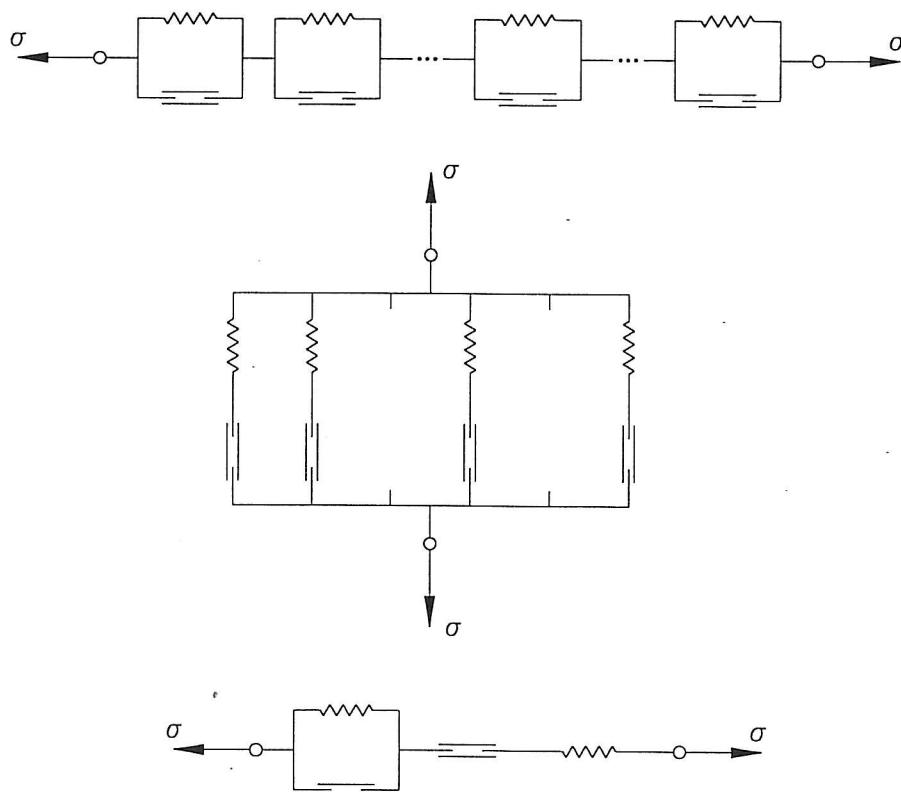
$$\left( \sigma - \rho \frac{\partial w}{\partial \epsilon} \right) \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (24.38)$$

I begge udtryk står der naturligvis blot

$$\sigma \dot{\epsilon} - \sigma^e \dot{\epsilon}^e \geq 0 \quad (24.39)$$

Af ovenstående to simple eksempler fremgår, at man ikke en gang for alle kan afgøre, hvilke ekstra parametre der udover de totale spændinger og tøjninger skal benyttes til at beskrive et materiales tilstand. Der er i det ene eksempel tale om en indre tøjning og i det andet om en indre spænding.

Eksempler på mere komplicerede modeller er vist i figur 24.4. I sådanne modeller er antallet af indre parametre stort, når man ønsker en fuldstændig beskrivelse af et materiales opførsel.



Figur 24.4

En fuldstændig beskrivelse af alle indre og ydre parametre er imidlertid ikke nødvendig. En sammenhæng mellem de ydre eller totale parametre og en betingelse, hvis opfyldelse sikrer, at dissipationen er positiv, er tilstrækkelig.

## 25 EKSEMPLER PÅ ENDIMENSIONALE MODELLER

For de to materialelementer, det elastiske og det dissipative element, såvel som materialer sammensat af de to elementer, skal her angives nogle eksempler på simple, endimensionale udtryk, der beskriver materialer som omtalt i de foregående to afsnit.

### 25.1 Elastiske materialer

Med en tøjningsenergifunktion

$$w = \left( \frac{1}{2} E \varepsilon^2 - E \alpha \varepsilon \theta \right) / \rho + c_T \theta + \frac{1}{2} K \theta^2 \quad (25.1)$$

finder man spændingen

$$\sigma = \rho \partial w / \partial \varepsilon = E(\varepsilon - \alpha \theta) \quad (25.2)$$

og den specifikke varmfylde

$$c = \partial w / \partial \theta = c_T - E \alpha \varepsilon / \rho + K \theta \quad (25.3)$$

I disse udtryk er  $E$ ,  $\alpha$ ,  $c_T$  og  $K$  konstanter

$E \sim$  elasticitetskoefficienten

$\alpha \sim$  varmeudvidelseskoefficienten

$c_T \sim$  den specifikke varmfylde i referencetilstanden

Benyttes i stedet den komplementære tøjningsenergifunktion

$$h = \left( \frac{1}{2} \sigma^2 / E + \alpha \sigma \theta \right) / \rho - c_T \theta - \frac{1}{2} K \theta^2 \quad (25.4)$$

finder man

$$\varepsilon = \rho \partial h / \partial \sigma = \sigma / E + \alpha \theta \quad (25.5)$$

og

$$c = -\partial h / \partial \theta = c_T - \alpha \sigma / \rho + K \theta \quad (25.6)$$

Når  $E$ ,  $\alpha$ ,  $c_T$  og  $K$  er konstanter, er relationerne mellem  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $c$  og  $\theta$  lineære, og et materiale, der beskrives ved (25.1) eller (25.4), kaldes lineær-elastisk. Materialer, som er ikke-lineære, behandles senere.

Om passive, elastiske materialer forudsættes, at der til enhver homogen temperaturfordeling eksisterer en spændings- og tøjningsfri ligevægtstilstand, og at der ved fastholdt temperatur skal udføres et positivt arbejde for at bringe materialet bort fra denne tilstand. Med (23.3) og (25.2) finder man for et lineærelastisk materiale

$$dw_i = \sigma d\varepsilon = E\varepsilon d\varepsilon \quad (25.7)$$

og dermed

$$w_i = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (25.8)$$

hvilket medfører, at elasticitetskoefficienten  $E$  skal være større end nul.

## 25.2 Dissipative materialer

Traditionelt deles dissipative materialer i viskose materialer og plastiske materialer. De viskose materialer beskrives ved relationer mellem spænding og tøjningshastighed, og de plastiske materialer beskrives ved relationer mellem spænding og tøjningsændring, hvor tøjningsændringens tidsforbrug er uden betydning.

### 25.2.1 Viskose materialer

Den konstitutive ligning

$$\sigma + p = \eta(\dot{\varepsilon} - \alpha\dot{\theta}) \quad (25.9)$$

hvor  $-p$  er spændingen i en ligevægtstilstand og  $\eta$  er en konstant, viskositetskoefficienten, beskriver en væske med varmeudvidelseskoefficienten  $\alpha$ . Under en strømningsproces er dissipationshastigheden bestemt ved

$$\rho\dot{D} = \sigma\dot{\varepsilon} = (\eta(\dot{\varepsilon} - \alpha\dot{\theta}) - p)\dot{\varepsilon} = \eta\dot{\varepsilon}^2 - (\eta\alpha\dot{\theta}\dot{\varepsilon} + p\dot{\varepsilon}) \quad (25.10)$$

Når dissipationens ulighed (24.28) skal være opfyldt under alle forhold, må man her forlange, at viskositetskoefficienten  $\eta$  skal være større end nul. Den omvendte relation til (25.9) findes umiddelbart til

$$\dot{\varepsilon} = (\sigma + p)/\eta + \alpha\dot{\theta} \quad (25.11)$$

som også medfører, at  $\eta$  skal være positiv, når dissipationshastigheden skal være positiv.

### 25.2.2 Plastiske materialer

Plastiske deformationer, eller rettere plastiske deformationsændringer, finder først sted, dvs. materialet flyder, når spændingerne når op på en vis tærskelværdi. Denne tærskelværdi fastlægges ved hjælp af en *flydefunktion*

$$f = f(\sigma, \kappa) \quad (25.12)$$

således at

$f < 0$  svarer til plastiske tøjningsændringer = 0

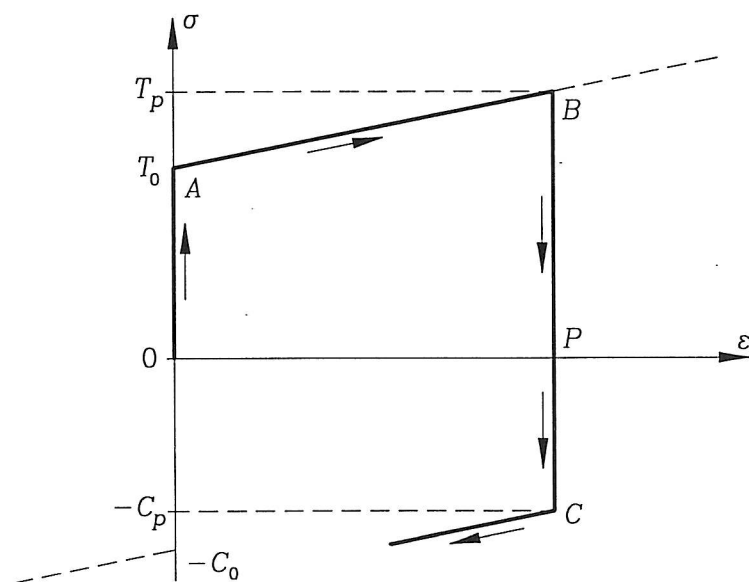
$f = 0$  svarer til flydning, mens

$f > 0$  ikke kan forekomme

I (25.12) er  $\sigma$  spændingen, og  $\kappa$  er en *hærtningsparameter*, som er en funktion af de plastiske tøjninger

$$\kappa = \kappa(\epsilon) \quad (25.13)$$

Figur 25.1 viser i et  $\sigma, \epsilon$ -diagram en deformationsproces, hvor materialet føres fra ubelastet tilstand i punkt 0 til trækflydning i punkt A, videre under udvikling af plastiske tøjninger til punkt B, hvorfra der aflastes. Under aflastningen er de plastiske tøjnings-



Figur 25.1

ændringer nul, og først når spændingen når en værdi svarende til punkt C, vil der igen udvikles plastiske tøjningsændringer, denne gang svarende til trykflydning.

Svarende til den plastiske tøjning  $\varepsilon = OP$  betegnes flydespændingerne i henholdsvis træk og tryk med  $T_P$  og  $C_P$ , og det er disse størrelser, som afhænger af den plastiske tøjning via hærkningssparameteren  $\kappa$ . Som et eksempel kan man i dette endimensionale tilfælde have  $\kappa = \varepsilon$ ,  $T_P = T_0 + H\kappa$  og  $C_P = C_0 - H\kappa$  sammen med flydefunktionen  $f = (\sigma - T_P)(\sigma + C_P) = (\sigma - H\kappa - T_0)(\sigma - H\kappa + C_0)$  og dermed *flydebetingelsen*

$$f = (\sigma^* - T_0)(\sigma^* + C_0) = 0 \quad (25.14)$$

hvor

$$\sigma^* = \sigma - H\kappa \quad (25.15)$$

Til bestemmelse af den plastiske tøjning benyttes blandt andet *flydeloven*

$$d\varepsilon = d\mu \partial g / \partial \sigma \quad (25.16)$$

hvor  $d\varepsilon$  er tøjningsinkremitter,  $g$  er *det plastiske potentiale*, der ligesom flydefunktionen  $f$  er en funktion af  $\sigma$  og  $\kappa$

$$g = g(\sigma, \kappa) \quad (25.17)$$

og  $d\mu$  er en skaleringsfaktor.

Med

$$\begin{aligned} d &= d\varepsilon / d\alpha \\ \lambda &= d\mu / d\alpha \end{aligned} \quad (25.18)$$

hvor  $\alpha$  er en evolutionsparameter, og hvor  $d$  kaldes den plastiske tøjningsændring, jævnfør afsnit 8.2.2, kan flydeloven skrives

$$d = \lambda \partial g / \partial \sigma \quad (25.19)$$

For materialer, hvor man kan benytte flydefunktionen som plastisk potentiale,  $g = f$ , kaldes

$$d = \lambda \partial f / \partial \sigma \quad (25.20)$$

den *associerede flydelov*.

Når det for en given værdi af parameteren  $\alpha$  gælder, at flydefunktionen  $f$  har en værdi mindre end nul, vil det for tilstrækkeligt små værdier af  $d\alpha$  gælde, at  $f < 0$  også for parameterværdien  $\alpha + d\alpha$ , og plastiske tøjningsændringer vil ikke umiddelbart forekomme i deformationsprocessen.



Helt anderledes er forholdene, når det for en værdi af  $\alpha$  gælder, at flydebetingelsen er opfyldt,  $f = 0$ . Der er nu to muligheder, når evolutionsparameteren ændres til  $\alpha + d\alpha$ . Hvis der fortsat er flydning, gælder  $f = 0$  og dermed også *konsistensbetingelsen*

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 0 \quad (25.21)$$

som, med

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\alpha} \\ h &= \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (25.22)$$

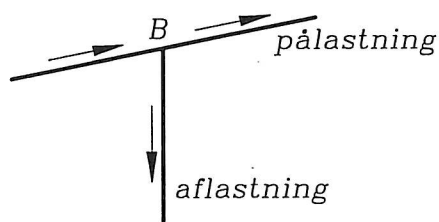
og flydeloven  $d\varepsilon/d\alpha = d = \lambda \partial g / \partial \sigma$ , kan skrives

$$l + \lambda h = 0 \quad (25.23)$$

hvoraf  $\lambda$  og dermed  $d$  kan bestemmes, når  $h$  er forskellig fra nul. (Tilfældet  $\frac{\partial f}{\partial \kappa} = 0$  og dermed  $h = 0$  behandles senere, i den tredimensionale beskrivelse).

Den anden mulighed er, at man har  $\partial f / \partial \alpha < 0$ , og de plastiske tøjninger ændres ikke, dvs.  $h = 0$  og dermed  $l < 0$ .

Svarende til parameterværdien  $\alpha + d\alpha$  er  $f < 0$ , og materialet flyder ikke. De to tilfælde betegnes henholdsvis *pålastning* og *aflastning*, og i figur 25.2 er forholdene omkring punkt  $B$  i figur 25.1 vist.



Figur 25.2

Da dissipationen er positiv, har man

$$\sigma d = \lambda \sigma \partial g / \partial \sigma > 0 \quad (25.24)$$

og med (25.22) og (25.23)

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\alpha} \sigma}{\frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\varepsilon}} < 0 \quad (25.25)$$

I eksemplet med  $\kappa = \varepsilon$  og  $f$  givet ved (25.14) finder man, at

$$\frac{\sigma}{H} \frac{d\sigma}{d\alpha} > 0 \quad (25.26)$$

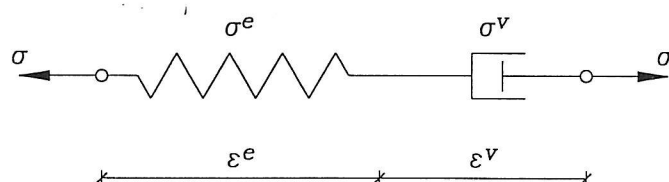
skal være opfyldt for ethvert  $\alpha$ .

### 25.3 Sammensatte materialer

I sammensatte materialer optræder indre parametre som skal elimineres, så der kun indgår totale parametre i f.eks. de konstitutive ligninger. Eksempler på sådanne materialer er viskoelastiske og skadede materialer.

#### 25.3.1 Viskoelastiske materialer

For viskose elementer benyttes ofte en dæmper som symbol i stedet for det mere generelle friktionselement, og i det i figur 25.3 viste *Maxwellelement* symboliserer dæmperen et



Figur 25.3

viskøst element, et *Newtonelement*, med den konstitutive ligning

$$\sigma^v = \eta \dot{\varepsilon}^v \quad (25.27)$$

mens fjederen symboliserer et elastisk element, et *Hookeelement*, med ligningen

$$\sigma^e = E \varepsilon^e \quad (25.28)$$

De totale spændinger og tøjninger opfylder

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^e = \sigma^v \\ \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^v \end{aligned} \quad (25.29)$$

og man finder

$$\eta \dot{\sigma} / E + \sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (25.30)$$

som den konstitutive ligning for dette materiale. Af (25.30) fremgår, at materialekonstanterne  $\eta$  og  $E$  ikke indgår hver for sig, men i kombinationerne  $\eta/E$  og  $\eta$  eller  $E_\eta$  og  $E$ . Ligningen skrives derfor

$$p_1 \dot{\sigma} + \sigma = q_1 \dot{\varepsilon} \quad (25.31)$$

hvor

$$p_1 = \eta/E \quad \text{og} \quad q_1 = \eta \quad (25.32)$$

Dissipationshastigheden  $\sigma^v \dot{\varepsilon}^v$  findes til

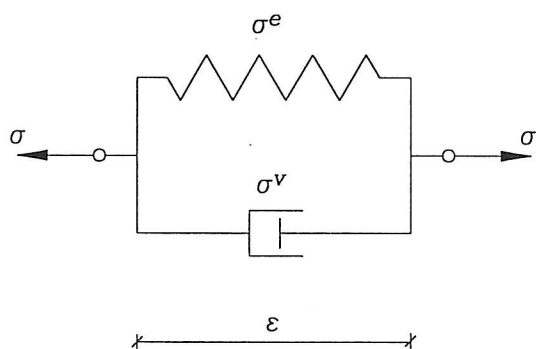
$$\dot{D} = \sigma^2 / q_1 \quad (25.33)$$

hvilket medfører, at  $q_1$  skal være positiv.

Da det for passive elastiske delelementer gælder, at  $0 < E$ , må det også gælde, at

$$0 < p_1 \quad (25.34)$$

Mens det elastiske og det viskose delelement i Maxwellelement er anbragt i serie, er de i *Kelvin-Voigtelementet* anbragt parallelt, se figur 25.4. De totale spændinger og tøjnin-



Figur 25.4

ger opfylder her

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^e + \sigma^v \\ \varepsilon &= \varepsilon^e = \varepsilon^v \end{aligned} \quad (25.35)$$

og man finder den konstitutive ligning

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (25.36)$$

som, med

$$q_0 = E \quad \text{og} \quad q_1 = \eta \quad (25.37)$$

bliver

$$\sigma = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \quad (25.38)$$

Dissipationshastigheden bliver for dette materiale

$$\dot{D} = q_1\dot{\varepsilon}^2 \quad (25.39)$$

dvs.  $0 < q_1$  og med passive delmaterialer også

$$0 < q_0 \quad (25.40)$$

Påvirkes lineære, viskoelastiske materialer, som der her er tale om, med en i tiden konstant spænding  $\sigma_0$ , finder man, at tøjningen kan skrives

$$\varepsilon(t) = \psi(t)\sigma_0 \quad (25.41)$$

hvor  $\psi$  kaldes *krybefunktionen*. Tilsvarende finder man ved påvirkning af en konstant tøjning  $\varepsilon_0$ , at spændingen kan skrives

$$\sigma(t) = \varphi(t)\varepsilon_0 \quad (25.42)$$

hvor  $\varphi$  kaldes *relaksationsfunktionen*. I tabel 25.1 er konstitutive ligninger, krybefunktioner og relaksationsfunktioner angivet for de fire hidtil betragtede materialeelementer.

Materiale-element	Konstitutiv ligning	Krybe-funktion	Relaksations-funktion
Hooke	$\sigma = q_0\varepsilon$	$1/q_0$	$q_0$
Newton	$\sigma = q_1\dot{\varepsilon}$	$t/q_1$	$q_1\delta(t)$
Maxwell	$p_1\dot{\sigma} + \sigma = q_1\dot{\varepsilon}$	$(p_1 + t)/q_1$	$q_1 e^{-t/p_1}/p_1$
Kelvin-Voigt	$\sigma = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon}$	$(1 - e^{-q_0 t/q_1})/q_0$	$q_0 + q_1\delta(t)$

Tabel 25.1

På grund af lineariteten kan sammenhængen mellem spændinger og tøjninger nu angives ved hereditetsintegraler

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t - \tau) (\partial \sigma / \partial \tau) d\tau$$

eller

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) (\partial \varepsilon / \partial \tau) d\tau$$

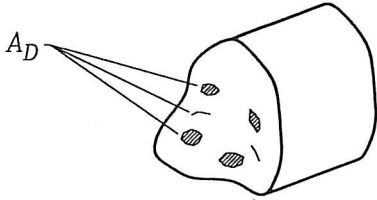
(25.43)

og kendskab til krybefunktionen og/eller relaksationsfunktionen kan træde i stedet for den konstitutive ligning. Selvom  $\psi$  og  $\varphi$  er funktioner af tiden  $t$ , er der stadig tale om materialer beskrevet ved tidsuafhængige parametre.

### 25.3.2 Skadede materialer

Materialer, i hvilke der udvikles revner, kaldes skadede materialer, mens udvikling af glideflader behandles som et fænomen i plastiske materialer.

Når revnernes areal i et tværsnit i et prøvelegeme udgør  $A_D$ , og det totale areal er  $A$ ,



Figur 25.5

jvf. figur 25.5, defineres en *skadeindikator*  $D$  ved

$$D = A_D / A \quad (25.44)$$

dvs. for  $D = 0$  er materialet uskadet, og for  $D = 1$  er materialet totalskadet, og prøvelegemet er gået i to stykker. Herefter indføres den effektive spænding

$$\sigma_{eff} = F / (A - A_D) \quad (25.45)$$

som også kan skrives

$$\sigma_{eff} = F / A(1 - D) = \sigma / (1 - D) \quad (25.46)$$



Som regel begynder revnerne ikke at udvikles før spændingen  $\sigma$  eller tøjningen  $\varepsilon$  overskrider en vis tærskelværdi, dvs.

$$D = 0 \quad \text{for} \quad \begin{cases} \sigma < \sigma_D & \text{eller} \\ \varepsilon < \varepsilon_D \end{cases} \quad (25.47)$$

jvf. afsnit 25.2.2 om plastiske materialer.

Mens  $D$  således nok har værdien nul ved starten af en deformationsproces, vil man kun sjældent kunne behandle materialet som et kontinuerligt skadet materiale, indtil  $D$  når værdien 1. Nogle af de *mikrorevner*, som for  $D > 0$  udvikler sig, vil for en kritisk værdi  $D_c$  løbe sammen og danne en eller nogle få *makrorevner*, som så kan medføre det endelige brud. Beskrivelsen af makrorevners udvikling kræver en to- eller tredimensional beskrivelse og hører derfor ikke hjemme her i dette kapitel, men i et afsnit om *brud* eller *revnemekanik*.

For  $D = 0$  beskrives det uskadede materiale som et af de materialer, der er omtalt tidligere i dette afsnit, f.eks. som et elastisk materiale

$$\sigma = E\varepsilon \quad (25.48)$$

Når skadeindikatoren  $D$  er forskellig fra nul, er det den effektive spænding, som indgår i (25.48), dvs.

$$\sigma_{eff} = \sigma / (1 - D) = E\varepsilon \quad (25.49)$$

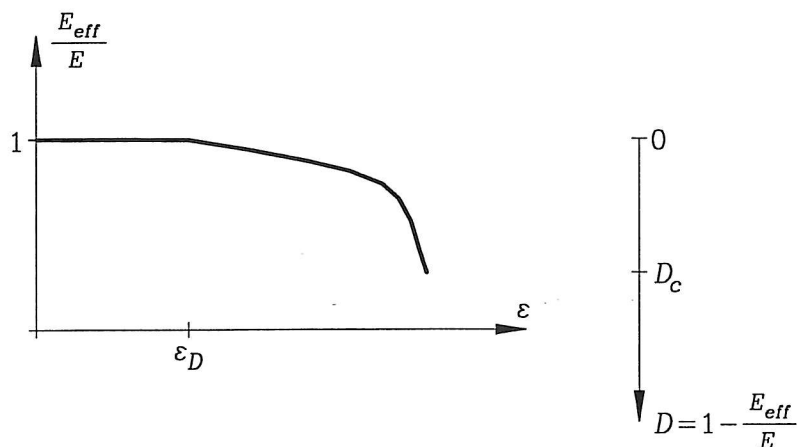
eller

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon = E_{eff}\varepsilon \quad (25.50)$$

hvor

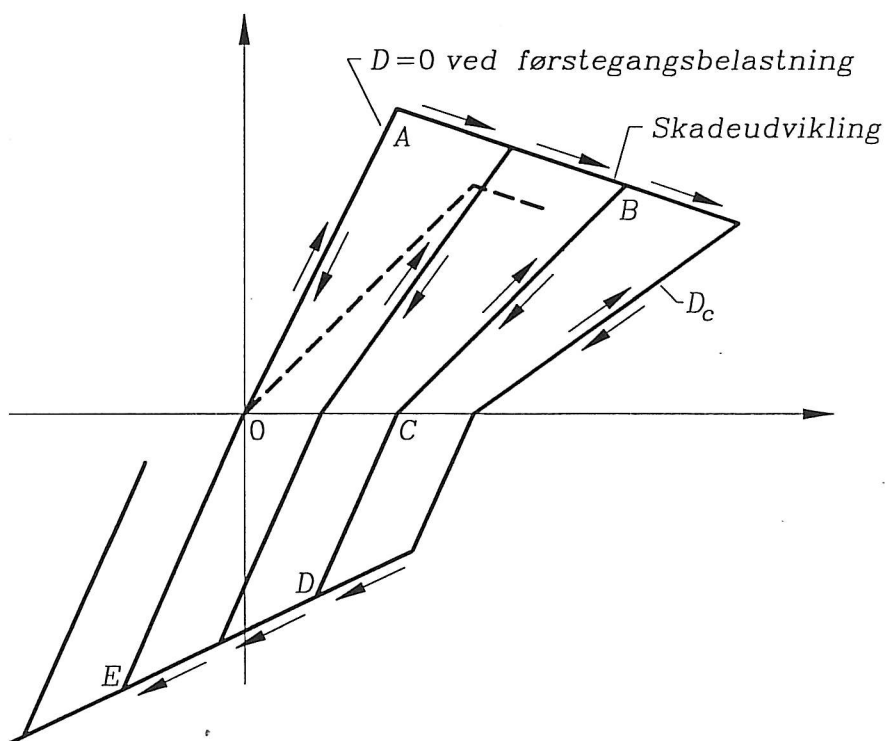
$$E_{eff} = E(1 - D) \quad (25.51)$$

er den effektive elasticitetsmodul for det skadede materiale ved den pågældende temperatur. Skadeindikatorens afhængighed af f.eks. tøjningen kan således bestemmes ved at bestemme den effektive elasticitetsmoduls afhængighed af tøjningen, se figur 25.6.



Figur 25.6

Det bemærkes, at  $d\sigma = E_{eff}d\varepsilon$  gælder med konstante  $E_{eff}$  for alle værdier af  $D$  mellem 0 og  $D_c$ , sålænge der ikke sker yderligere revneudvikling. Revneudvikling fortsætter, når spændingen igen overskrider tærskelværdien, jvf. figur 25.7. Ligesom tærskelvær-

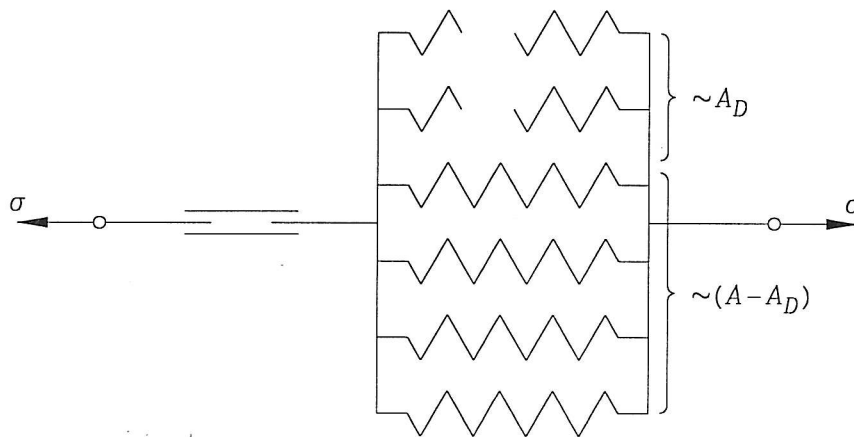


Figur 25.7

dien for plastiske materialer fastlægges ved en flydefunktion, fastlægges tærskelværdien for skadede materialer ved en funktion af f.eks. spændingen. Revneudvikling finder kun sted, når der optræder trækspændinger.

Når der optræder trykspændinger, kan der forekomme f.eks. plastiske deformationer, og man må da kombinere flere beskrivelser. Den punkterede linie fra origo svarer til andengangsbelastning efter førstegangsbelastning  $0ABCDE0$  med  $E_{eff}$  lig med den effektive elasticitetsmodul ved aflastning fra  $B$ .

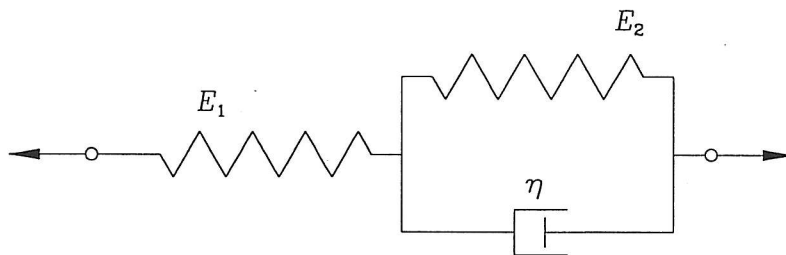
En symbolsk model af materialet er vist i figur 25.8.



Figur 25.8

### Øvelser

25.1) Figur 25.9 viser en symbolsk model af et Poynting-Thomson materiale.



Figur 25.9

Vis, at

a) Den konstitutive ligning kan skrives

$$p_1 \dot{\sigma} + \sigma = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$$

hvor

$$p_1 = \eta / (E_1 + E_2)$$

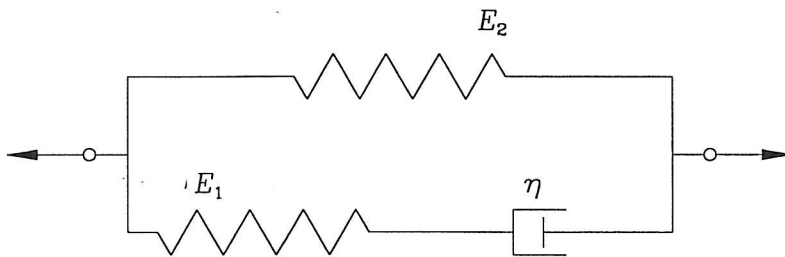
$$q_0 = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$$

$$q_1 = E_1 \eta / (E_1 + E_2)$$

b) Dissipationshastigheden er

$$\begin{aligned} \dot{D} &= (q_1 \dot{\varepsilon} - p_1 \dot{\sigma})^2 / (q_1 - q_0 p_1) \\ &= (\sigma - q_0 \varepsilon)^2 / (q_1 - q_0 p_1) \end{aligned}$$

25.2) En anden symbolsk model af et Poynting-Thomson materiale er vist i figur 25.10. Vis, at den konstitutive ligning og dissipationshastigheden er som i øvelse 25.1, men i



Figur 25.10

dette tilfælde med

$$p_1 = \eta / E_1$$

$$q_0 = E_2$$

$$q_1 = \eta (E_1 + E_2) / E_1$$



